CLASE 13. Integración Compleja

Definiremos integrales (definidas) de funciones complejas en términos de integrales reales. Las integrales definidas se toman sobre curvas diferenciables o curvas poligonales (también los llamamos senderos. Ver Definición 12.10).

13.1 Integrales de línea complejas

La generalización inmediata de una integral (definida) real es la integral de una función compleja definida en un intervalo real.

Definición 13.1 (Integral de función compleja definida en un intervalo real)**.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua con partes real e imaginaria u y v, respectivamente, $f(t) = u(t) + iv(t)$, definimos la integral de f sobre el intervalo real $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Algunas propiedades (similares al caso real) son:

1. Si c es una constante compleja es
$$\int_a^b cf(t)\,\mathrm{d}t = c\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $a \leq b$ entonces se cumple que
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Definición 13.2 (Integral de línea)**.** Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja continua y sea C una curva poligonal (o sendero) en $\mathcal{D}$, definida por la ecuación (paramétrica) $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Se define la integral (de línea) de f sobre la curva C por

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si definimos la curva opuesta $-C$ por la ecuación $z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$ entonces se tiene que:

$$\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))[-z'(-t)]\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z)$ (las partes real e imaginaria, respectivamente, de la función f) y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, entonces podemos expresar la integral de línea como

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) \;=\; \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \tag{1}$$

o por

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_C f(x,y)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) \;=\; \int_C f\,\mathrm{d}x + i\int_C f\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Con la Definición 13.2 podemos demostrar:

Teorema 13.3 (Desigualdad *ML*)**.** *Sea C una curva poligonal (en el plano complejo) de longitud L y sea f una función (compleja) continua en C. Si existe un número real $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en C, entonces*

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq ML.$$

Prueba. Parametrizando C de la forma usual, $z = z(t)$ con $a \leq t \leq b$, se obtiene que

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t = ML.$$

□

Teorema 13.4 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f(z)$ una función continua en un dominio (ver Definición 12.12) $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Si $f(z)$ es la derivada de una función analítica $F(z)$ definida en $\mathcal{D}$, entonces*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A)$$

para cualquier curva C en $\mathcal{D}$ que una el punto A con el punto B.

Prueba. Si $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, con $z(a) = A$ y $z(b) = B$, es una parametrización de C entonces

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = f(z)$ es continua en $\mathcal{D}$, la función compuesta $(F \circ z)(t) = F(z(t))$ es derivable y, por la regla de la cadena, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(z(t))] = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}(z(t)) \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = F'(z(t)) \cdot z'(t)$ (para $a \leq t \leq b$). Luego

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C F'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ z)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(B) - F(A).\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 13.5. Usando la definición, evaluemos la integral $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$, donde C es la circunferencia (simple) de centro a y radio r, orientada en sentido positivo, $C = C(a,r):\ |z-a| = r$.

Parametrizando es $z(t) = a + r\,e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego $z'(t) = i\,r\,e^{it}$ y

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)}{z(t)-a}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Nótese que esta integral es diferente de cero.

Del mismo modo se prueba que

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = 0 \quad \forall\, k \neq 1.$$

13.2 Teoremas de Cauchy

Recordemos que las expresiones del tipo $\displaystyle\int_C p\ \mathrm{d}x + q\ \mathrm{d}y$, donde p y q son continuas en una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ y siendo C una curva en $\mathcal{D}$ (orientada), representan la integral de línea, sobre la curva C, del campo cuyas componentes son p y q, en ese orden. Cierta clase de estas integrales se caracterizan por la propiedad de que dependen sólo de los extremos de la curva, o en forma equivalente, que la integral vale cero para toda curva cerrada orientada (simple) en $\mathcal{D}$ (ver Definición 7.2). El siguiente teorema es conocido (ver Teorema 7.5).

Teorema 13.6. *La integral de línea* $\displaystyle\int_C p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$*, definida en un dominio* $\mathcal{D}$ *(con* C *contenida en* $\mathcal{D}$*), vale cero para toda curva cerrada orientada (simple) en* $\mathcal{D}$ *si y sólo si existe una función compleja* $F(x,y)$ *en* $\mathcal{D}$ *tal que* $\dfrac{\partial F}{\partial x} = p$ *y* $\dfrac{\partial F}{\partial y} = q$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Suponiendo que la integral depende sólo de los puntos extremos de la curva, tomamos un punto fijo $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Para cualquier punto $(x, y) \in \mathcal{D}$ trazamos la línea poligonal C, contenida en $\mathcal{D}$, de lados paralelos a los ejes coordenados, que una a dichos puntos (partiendo de (x_0, y_0)) y definimos la función $F(x, y)$ por medio de

$$F(x,y) = \int_C p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y.$$

Esta función está bien definida (recuerde que, por hipótesis, la integral no depende de la curva C sino de sus extremos). Al tomar el último segmento de C paralelo al eje x, la variable y es constante (en éste último segmento), así que $\mathrm{d}y = 0$ y

$$F(x,y) = \int_{x_1}^{x} p(x,y)\,\mathrm{d}x + \text{constante},$$

siendo x_1 la primera componente del punto inicial del último segmento.

Luego, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = p(x, y)$ (para cualquier $(x, y) \in \mathcal{D}$).

En forma similar, al tomar el último segmento paralelo al eje y (recuerde que, por hipótesis, la integral no depende de C), es x constante, así que $\mathrm{d}x = 0$ y

$$F(x,y) = \int_{y_1}^{y} q(x,y)\,\mathrm{d}y + \text{(otra) constante}.$$

Luego, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = q(x, y)$, lo cual termina la prueba (de la primera implicación) puesto que (x, y) era arbitrario (en $\mathcal{D}$).

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente, si existe la función $F(x, y)$, entonces al evaluar la integral, parametrizando la curva C con $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, obtenemos

$$\int_C p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y = \int_a^b [F_x\, x'(t) + F_y\, y'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(x(t), y(t))]\,\mathrm{d}t = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

y la integral, entonces, depende sólo de los puntos extremos de la curva. □

Teorema 13.7. *La integral* $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$*, con* f *continua en un dominio* $\mathcal{D}$*, vale cero para toda curva cerrada simple (orientada) en* $\mathcal{D}$ *si y sólo si* f *es la derivada de una función* F *que es analítica en* $\mathcal{D}$*.*

Prueba. La demostración es sencilla. Por el Teorema 13.6, la integral $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \overset{(2)}{\overset{\downarrow}{=}} \int_C f\,\mathrm{d}x + if\,\mathrm{d}y$ vale cero (para toda curva cerrada simple orientada) si y sólo si existe una función $F(x, y)$ en $\mathcal{D}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = if(z),$$

es decir, $F(z)$ satisface las ecuaciones (complejas) de Cauchy-Riemann (ver (5)): $F_x = -iF_y$, con F_x y F_y continuas (pues f lo es), lo cual es cierto si y sólo si $F(z)$ es analítica con derivada $F'(z) = f(z)$. □

En su forma más simple, el siguiente teorema (Teorema de Cauchy) establece que si C es una curva simple cerrada (orientada) y f es una función analítica en un conjunto abierto que contiene a C y a la región interior delimitada por C, entonces $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Teorema 13.8 (Cauchy)**.** *Sea C una curva cerrada simple, orientada positivamente, y sea $f(z)$ una función analítica definida en un conjunto abierto que contiene a C y a la región interior $\mathcal{D}$ delimitada por C. Entonces*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Prueba. Denotemos, como hemos venido haciendo, las partes real e imaginaria de f por u y v, respectivamente.

Nuestro próximo paso será usar el Teorema de Green (Teorema 5.2), lo cual supone una restricción adicional sobre $\mathcal{D}$ (note que las derivadas parciales de u y de v son continuas por ser f analítica. Ver Teorema 12.6). Escribimos

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\overset{(1)}{\downarrow}}{=} \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

Luego, por el Teorema de Green,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{D}} (-v_x - u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_{\mathcal{D}} (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

haciendo uso, en la última igualdad, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$ □

Considerando la forma general del Teorema de Green (Teorema 5.4), si $\mathcal{D}$ es un conjunto en el plano con frontera $\partial\mathcal{D}$ formada por una curva externa C y curvas interiores $C_1, C_2, \ldots, C_N$, donde es válido el Teorema de Green, entonces, con la misma demostración del Teorema 13.8, podemos escribir:

Teorema 13.9 (Cauchy)**.** *Sea $f(z)$ analítica (con $f'(z)$ continua) en un conjunto abierto que contiene a $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Entonces*

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

donde la orientación de la (curva) frontera $\partial\mathcal{D}$ es la exigida por el Teorema de Green (ver Teorema 5.4).

Teorema 13.10 (Deformación)**.** *En las condiciones anteriores, si las curvas frontera $C, C_1, C_2, \ldots, C_N$ se orientan todas en sentido anti-horario entonces se cumple que*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Prueba. La demostración es inmediata notando que las curvas $C_1, C_2, \ldots, C_N$ están orientadas en sentido contrario al que se pide en el Teorema de Green (Teorema 5.4). □

Repitiendo el argumento usado en la demostración del Teorema 13.8, podemos re-enunciar éste de la siguiente manera:

Teorema 13.11. *Si $f(z)$ es analítica en un disco abierto $\mathcal{D}$, entonces para toda curva cerrada C en $\mathcal{D}$ se cumple que*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ejemplo 13.12. Halle la parte real de la integral $I = \displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{|z-1|^2}$ si C es la circunferencia dada por $|z| = 2$ en sentido positivo.

Solución. Parametrizando es $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Así, de $z - 1 = (2\cos t - 1) + 2i \operatorname{sen} t$ deducimos que $|z-1|^2 = (2\cos t - 1)^2 + 4\operatorname{sen}^2 t = 5 - 4\cos t$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{2i\cos t - 2\operatorname{sen} t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-2\operatorname{sen} t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} \frac{2\cos t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Luego,

$$\operatorname{Re}(I) = -2\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t = (-2)\left(\frac{1}{4}\right)\Big[\ln|5 - 4\cos t|\Big]_0^{2\pi} = 0.$$

Ejemplo 13.13. Demuestre que si $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con valores reales entonces $f'(z)$ no existe ó $f'(z) = 0$ en $\mathcal{D}$.

Prueba. Para cualquier $a = (a_1, a_2)$ en $\mathcal{D}$, suponiendo que $f'(a)$ existe es

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Calculamos éste límite a lo largo de las siguientes curvas

1. Para $z - a = h$ real (basta tomar la recta vertical $y = a_2$ para esto) se obtiene que $f'(a)$ es un número real.

2. Para $z - a = ih$ imaginario puro (basta tomar la recta horizontal $x = a_1$) se obtiene que $f'(a) = \frac{\text{(real)}}{ih} = -i\frac{\text{(real)}}{h}$, el cual es un número imaginario puro.

Por lo tanto, $f'(a) = 0$ (el único número a la vez real e imaginario puro), siendo a arbitrario.

$\square$

Ejemplo 13.14. Obtener el valor de $I = \displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z$ si C es la circunferencia dada, en sentido positivo, por $|z| = \frac{1}{2}$.

Solución. La función $g(z) = \frac{1}{z^2-1}$ es analítica en un abierto que contiene a C y a su región interior (ver Figura 1). Así, $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 1}$ es analítica en ese abierto y, en consecuencia (Teorema 13.8),

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

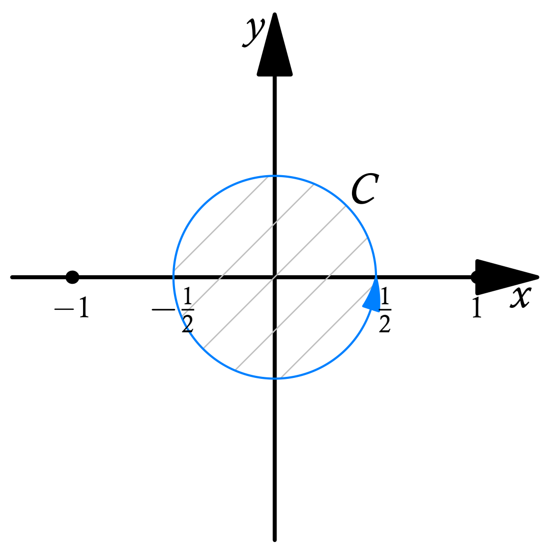

Figura 1: Región encerrada por la curva $|z| = \frac{1}{2}$.